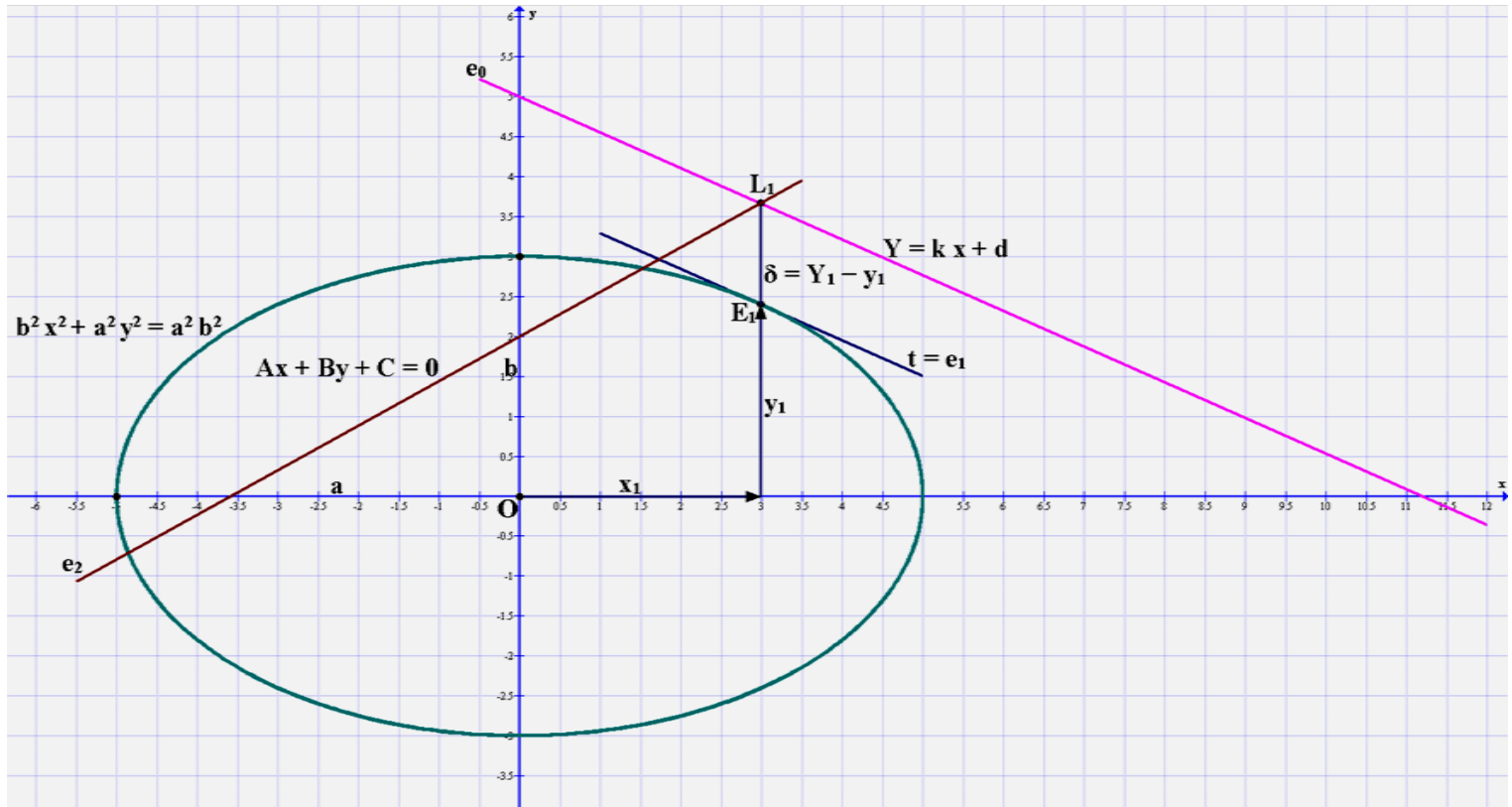


Egyenes és ellipszis érintkezéséről

Az interneten talált [1] munka hívta fel a figyelmünket a címbeli témára. Most erről lesz szó. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Itt együtt ábrázoltuk az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad (1)$$

egyenletű türkiz ellipszist, valamint az

$$Y = k \cdot x + d \quad (2)$$

egyenletű pink egyenest. Feltüntettük az ellipszis egy $E_1(x_1, y_1)$ pontját is, továbbá az ugyanazon x_1 koordinátához tartozó L_1 egyenes - pontot is.

Az egyenes és az ellipszis akkor bír közös ponttal, ha a feltüntetett ordináta - különbségre:

$$\delta = Y_1 - y_1 = Y(x_1) - y(x_1) = 0 \rightarrow x_{egy} = x_{ell}, y_{egy} = y_{ell}, \quad (3)$$

vagyis az ellipszis E_1 és az egyenes L_1 pontjai egybeesnek. Ez egy nyilvánvaló tény.

Ekkor (1), (2) és (3) szerint – az $_1$ indexet elhagyva – :

$$\begin{aligned} b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot (k \cdot x + d)^2 &= a^2 \cdot b^2, \\ b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot (k^2 \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot x \cdot d + d^2) &= a^2 \cdot b^2, \\ x^2 \cdot (b^2 + a^2 \cdot k^2) + x \cdot (a^2 \cdot 2 \cdot k \cdot d) + a^2 \cdot d^2 &= a^2 \cdot b^2, \\ (b^2 + a^2 \cdot k^2) \cdot x^2 + (a^2 \cdot 2 \cdot k \cdot d) \cdot x + a^2 \cdot (d^2 - b^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

A (4) másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldva:

$$x_{0;1,2} = \frac{-(a^2 \cdot 2 \cdot k \cdot d) \pm \sqrt{(a^2 \cdot 2 \cdot k \cdot d)^2 - 4 \cdot (b^2 + a^2 \cdot k^2) \cdot a^2 \cdot (d^2 - b^2)}}{2 \cdot (b^2 + a^2 \cdot k^2)}. \quad (5)$$

Az ellipszis és az egyenes közös pontjainak száma **0**, **1** és **2** lehet – 1. ábra; itt nekünk csak az érintési pontra van szükségünk, vagyis csak **1** darab megoldásra. Ennek matematikai feltétele az, hogy a négyzetgyök alatti mennyiség zérus legyen, azaz:

$$(a^2 \cdot 2 \cdot k \cdot d)^2 - 4 \cdot (b^2 + a^2 \cdot k^2) \cdot a^2 \cdot (d^2 - b^2) = 0; \quad (6)$$

kifejtve:

$$\begin{aligned} 4 \cdot a^4 \cdot k^2 \cdot d^2 - 4 \cdot a^2 \cdot (b^2 \cdot d^2 + a^2 \cdot k^2 \cdot d^2 - b^4 - a^2 \cdot b^2 \cdot k^2) &= 0, \\ 4 \cdot a^4 \cdot k^2 \cdot d^2 - 4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot d^2 - 4 \cdot a^4 \cdot k^2 \cdot d^2 + 4 \cdot a^2 \cdot b^4 + 4 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot k^2 &= 0, \\ -4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot d^2 + 4 \cdot a^2 \cdot b^4 + 4 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot k^2 &= 0, \\ 4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (a^2 \cdot k^2 + b^2 - d^2) &= 0, \text{ innen } a^2 \cdot b^2 \neq 0 \text{ miatt:} \\ \underline{d^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Most (5), (6) és (7) - tel az érintkezési pont abszcisszája, (7) - tel is:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{-(a^2 \cdot 2 \cdot k \cdot d) \pm 0}{2 \cdot (b^2 + a^2 \cdot k^2)} = -a^2 \cdot \frac{k \cdot d}{b^2 + a^2 \cdot k^2} = -a^2 \cdot \frac{k \cdot d}{d^2} = -a^2 \cdot \frac{k}{d}, \text{ tehát:} \\ \underline{x_0 = -a^2 \cdot \frac{k}{d}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Az érintkezési pont ordinátája az egyenes egyenletéből, (7) - tel is:

$$\begin{aligned} y_0 &= k \cdot x_0 + d = -a^2 \cdot \frac{k}{d} \cdot k + d = \frac{d^2 - a^2 \cdot k^2}{d} = \frac{b^2}{d}, \text{ tehát:} \\ \underline{y_0 = \frac{b^2}{d}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Az ellipszis érintőjének iránytangense az érintési pontban – [2] –, (8) és (9) - cel is:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{ell} &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{-a^2 \cdot \frac{k}{d}}{\frac{b^2}{d}} = k = \operatorname{tg} \varphi_{egy}, \text{ tehát:} \\ \underline{\operatorname{tg} \varphi_{ell} = \operatorname{tg} \varphi_{egy}}, \end{aligned} \quad (10)$$

a várakozásnak megfelelően.

Megjegyzések:

M1. Sokaknak az itteniek ismertek lehetnek, akár középiskolai tanulmányaikból is; vagy nem, mert (ez is) kimaradt. Tapasztalatból tudjuk, hogy néha nem árt ismételni.

M2. Az 1. ábrán az ellipszis E_1 pontbeli érintője és a magenta egyenes párhuzamosra lett felvéve. Ez talán kicsit megkönnyíti a megértést. A bordó egyenes általános helyzetű.

M3. Most legyen az egyenes egyenlete

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \quad (11)$$

alakú! Ekkor rendezéssel, (2) - vel is:

$$B \cdot y = -C - A \cdot x \rightarrow y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B} \cdot x = k \cdot x + d, \text{ innen:}$$

$$d = -\frac{C}{B}, \quad k = -\frac{A}{B}. \quad (12)$$

Majd (7) és (12) - vel:

$$d^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2 \rightarrow \frac{C^2}{B^2} = a^2 \cdot \frac{A^2}{B^2} + b^2 \rightarrow \underline{C^2 = a^2 \cdot A^2 + b^2 \cdot B^2}. \quad (13)$$

A (13) eredmény megfelelője megtalálható [3] - ban is, ahol lényegében azt írják, hogy ha a (11) egyenes érinti az (1) ellipszist, akkor fennáll (13).

M4. Fentebb a középiskolai tanulmányokra hivatkoztunk. Nem teszünk úgy, mintha nem tudnánk róla, hogy

~ az egyik középiskola és a másik középiskola nem egyformán veszi komolyan a tenni - valóit;

~ nem mindig képesek elvégezni az előírt tananyagot. (Mostanában – a járvány miatt – pedig még inkább ez a helyzet.)

Azt már középiskolás korunkban is tudtuk – mert tapasztalatokat szereztünk róla – , hogy a matektanárok sem csereszabatosak. Ez a helyettesítéseknél szinte rögtön kiderült.

Aztán tanárként már belülről – a tanári oldalról – is megtapasztaltuk, hogy ki hogyan fogja fel tanári teendőit. Ez is az oka annak, hogy nem vehető magától értetődőnek, hogy valaki, aki középiskolába járt, már a középiskolai tanulmányai során találkozott egy a középiskolai tananyaghoz tartozó anyagrésszel. Talán kevesebben vannak, de léteznek olyanok is,

akik később pótolják hiányosságait. Ők főleg a továbbtanulók lehetnek.
A pótlásban segíthetnek az interneten talált írások is, a tan - és segédkönyvek mellett.

M5. Most vesszük észre, hogy ismét az a helyzet állt elő, hogy egy (tanár -)szakmainak is mondható téma kapcsán megint csak „osztjuk az észet”. Ezt sokan „rühellik”, talán néha mi magunk is; ámde nem lehet elsiklani azon tény felett, hogy elképesztő méreteket öltött a műveltség - hiány. (Aki nem hiszi, kapcsolja be a TV - t. Ott már direkt erre épített szórá - koztató műsorokkal szolgálják ki az erre kíváncsiakat.) Ki tudja, talán mégis létezhet az olyan Olvasó, akinek az ilyen írások segíthetnek összerakni magában pár dolgot, pozitív céljai elérése érdekében. (Egyszer azt kérdezte egy barátom, hogy miért nem írok. Azt válaszoltam, hogy írok én. Most ezt kiegészítem annyival, hogy ezek talán nem versek, nem zenék, nincs művészi értékük, de segíthetnek más megvilágításba helyezni életünk bizonyos – szerintem fontos – dolgait. Akár a matekozás apropóján is.)

Források:

[1] – <https://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-07.pdf>

[2] – ***Obádovics J. Gyula***: Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

[3] – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 06. 18.